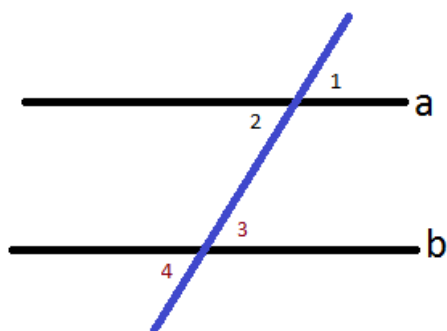


## خطوط موازی

به نام خدا

در جلسه قبل مطالبی رو درباره زاویه‌های متقابل به راس و زاویه‌های مکمل یادآوری کردیم. در این جلسه می‌خوایم درباره خطوط موازی با هم حرف بزنیم.

شکل زیر رو ببینید:



دو تا خط  $a$  و  $b$  رسم کردیم که به خط اومده قطعشون کرده، از هر فحایی که در جلسه قبل گفتیم، می‌دونیم که

زاویه ۱ و زاویه ۲ با هم برابرن، همچنین می‌دونیم:

زاویه ۳ و زاویه ۴ با هم برابرن.

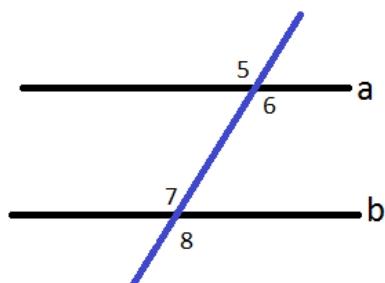
حالا می‌خوایم به ارتباط بین این ۴ تا زاویه پیدا کنیم.

چه ارتباطی؟

اگه بتونیم نشون بدهیم که زاویه‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ با هم برابرن، اونوقت نتیجه می‌گیریم که خطوط  $a$  و  $b$  با هم موازی هستن.

این مطلب درباره‌ی ۴ زاویه‌ی دیگه هم برقراره 😊

یعنی چی؟ شکل زیر رو ببینید:



از قبل می‌دونیم که زاویه‌های ۵ و ۶ با هم برابرند و زاویه‌های ۷ و ۸ با هم.

اگه بتونیم نشون بدیم که زاویه‌های ۵ و ۶ و ۷ و ۸ با هم برابرند، اونوقت نتیجه می‌گیریم که خطوط **a** و **b** با هم موازی هستن.

نکته مهم: چون زاویه‌ها همون دو به دو با هم برابرند، برای اینکه ببینیم دو خط موازین یا نه، فقط کافی‌ه یکی از بالایی‌ها با یکی از پایینی‌ها برابر باشن. در اینصورت بقیه تساویها هم خود به خود برقراره.

مطالبی که گفتیم رو به صورت زیر جمع‌بندی می‌کنیم:

اگه بتونیم نشون بدیم که یکی از زاویه‌های باز بالا (یعنی ۵ و ۶) با یکی از زاویه‌های باز پایین (یعنی ۷ و ۸) برابره اونوقت نتیجه می‌گیریم که دو تا خط **a** و **b** با هم موازیند.

همچنین اگه بتونیم نشون بدیم یکی از زاویه‌های تند بالا (۱ و ۲) با یکی از زاویه‌های تند پایین (۳ و ۴) برابره اونوقت باز هم نتیجه می‌گیریم که دو تا خط **a** و **b** با هم موازیند.

توجه توجه:

ما برای بررسی اینکه دو تا خط موازی هستند یا نه

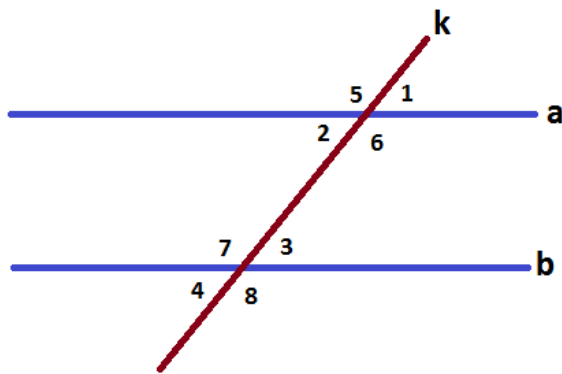
یا زاویه های تند بالا رو با زاویه های تند پایین مقایسه می کنیم

یا زاویه های باز بالا رو با زاویه های باز پایین

مثلا ما مجاز نیستیم زاویه ۱ از بالا رو با زاویه ۷ از پایین مقایسه کنیم. چون یکیشون زاویه بازه و یکیشون زاویه تند.

خب این از بررسی موازی بودن خطوط  $a$  و  $b$ .

حالا برعکسش رو در نظر می گیریم. فرض کنید دو تا خط موازی به ما دادن و از ما میفوان که ارتباط بین زاویه های تولید شده رو به دست بیاریم، شکل زیر رو ببینید:



خطوط  $a$  و  $b$  با هم موازیند. خط  $k$  این دو خط را قطع کرده است. چه ارتباطی بین زاویه های تولید شده وجود دارد؟

بچه ها این فیسیلی راحت، فقط به کوهولو دقت کنید.

وقتی به خط مثل  $k$  میاد دو تا خط موازی رو قطع میکنه، ۱ تا زاویه به وجود میاد. ۴ تا زاویه تند و ۴ تا زاویه باز. در این صورت:

۴ تا زاویه تند با هم برابرن

۴ تا زاویه باز هم با هم برابرن

یعنی زاویه های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ با هم و  
زاویه های ۵ و ۶ و ۷ و ۸ هم با هم برابرند.

می بینید مقدار داشته 😊

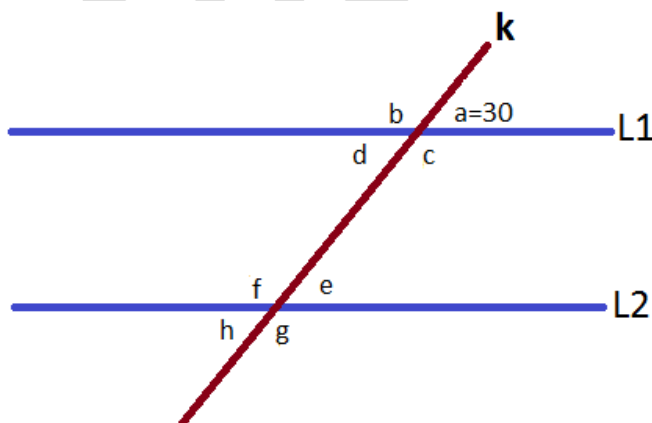
فقط توجه کنید در صورتی که  $a$  و  $b$  با هم موازی باشند این شرایط برقراره.

(اگر  $a$  و  $b$  موازی نباشن فقط زاویه های متقابل به راس با هم برابرند)

یه نکته جالبی که وجود داره اینه که با دانشی که ما درباره زاویه های مکمل، زاویه های متقابل به راس و خطوط موازی به دست آوردیم، اگر یکی از این ۸ تا زاویه رو بهمون بدن ما میتونیم ۷ تای دیگه رو هم پیدا کنیم. چطوری؟

بینیم:

در شکل زیر خطوط  $L1$  و  $L2$  موازی می باشند، اندازه زاویه  $a$  برابر  $30^\circ$  درجه است.  
اندازه زاویه های  $b$  و  $c$  و  $d$  و  $e$  و  $f$  و  $g$  و  $h$  را به دست آورید.



اینجا یه خط مورب اومده دو تا خط موازی رو قطع کرده، گفتیم در چنین شرایطی ۸ تا زاویه به وجود میاد، ۴ تا زاویه تند و ۴ تا زاویه باز.

۴ تا زاویه تند با هم برابرند و ۴ تا زاویه باز هم با هم برابرند.

کدام زاویه ها با  $a$  برابرند؟  $d, e, h$  بنابراین:

$$a = d = e = h = 30$$

اندازه ۴ تا زاویه پیدا شد، ۴ تا زاویه دیگر هم که با هم برابرند، پس کافیست اندازه یکیشون رو پیدا کنیم:

زاویه های  $a$  و  $b$  چه ارتباطی با هم دارند؟ مکمل هستند، بنابراین مجموع این دو زاویه برابر ۱۸۰ همیشه:

$$30 + b = 180$$

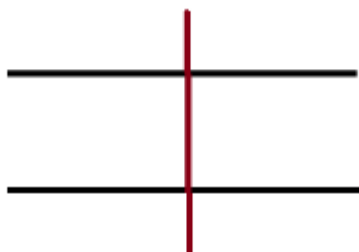
$$b = 150$$

اندازه زاویه  $b$  رو به دست آوردم، بنابراین:

$$b = c = f = g = 150$$

تا اینجا ما فرض کردیم که خط مورب دو تا خط موازی رو قطع کرده، حالا آنگه خط بیاد به دو تا خط موازی عمود شه چه اتفاقی میفته؟ یه اتفاق خیلی راحت 😊.

۸ تا زاویه قائمه بوجود میاد و هر ۸ تا، چون اندازشون ۹۰ درجه س با هم برابرند. شکل زیر رو ببینید:



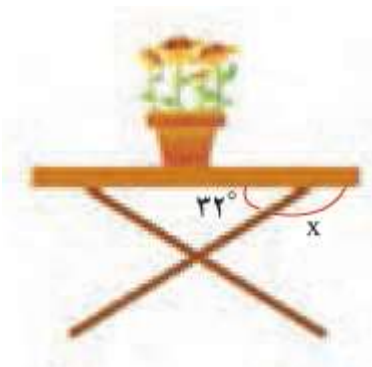
پند تا تمرین با هم حل کنیم 😊

حل تمرین صفحه ۳۷

توازی و تعامد

۱. در هر قسمت اندازه زاویه مجهول را پیدا کنید:

قسمت الف:



زاویه ۳۲ درجه و زاویه  $x$  چه ارتباطی با هم دارند؟

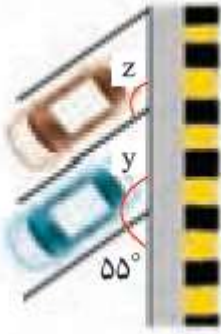
این دو زاویه با هم مکمل هستند، پس مجموعشون برابر ۱۸۰ درجه میشه :

$$32 + x = 180$$

$$x = 180 - 32 = 148$$

بنابراین اندازه زاویه مجهول برابر ۱۴۸ درجه است.

قسمت ب:



الان چشمتون باید دنبال این باشه که خطوط موازی رو پیدا کنید، بعد از اینکه خطوط موازی رو پیدا کردید به دنبال خطی باشید که اونا رو قطع کرده...تونستید پیدا کنید؟ آگه پیدا نکردید شکل زیر رو ببینید:



زاویه های  $Y$  و زاویه  $55$  درجه مکمل همدیگه هستن، بنابراین:

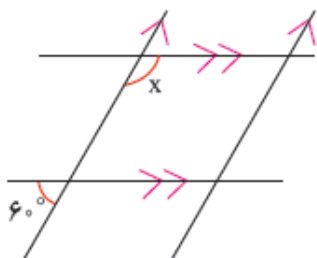
$$Y + 55 = 180$$

$$Y = 180 - 55 = 125$$

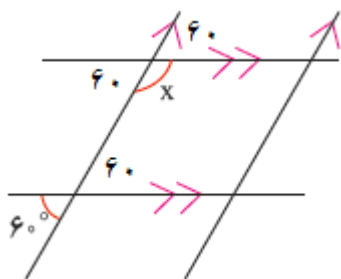
اندازه زاویه  $Y$  رو به دست آوردیم. طبق مطالبی که در مورد خطوط موازی گفتیم، زاویه  $Y$  و زاویه  $Z$  با هم برابرن، بنابراین:

$$Z = y = 125$$

قسمت ج:



ما یاد گرفتیم که با داشتن اندازه یکی از این ۸ زاویه، اندازه بقیه رو هم به دست بیاریم. اول از همه اونایی که با زاویه ۶۰ درجه برابرند رو مشخص می‌کنیم:



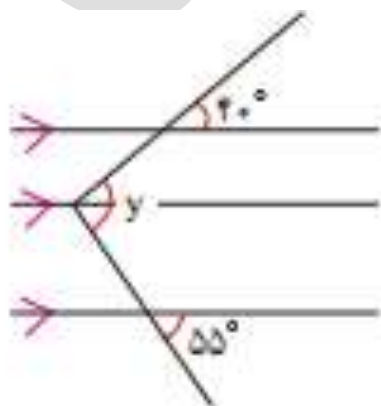
حالا باید بریم سراغ ۴ تا زاویه بعدی:

اگه به شکل دقت کنید میبینید که زاویه X با زاویه ۶۰ درجه مکمله، بنابراین:

$$X + 60 = 180$$

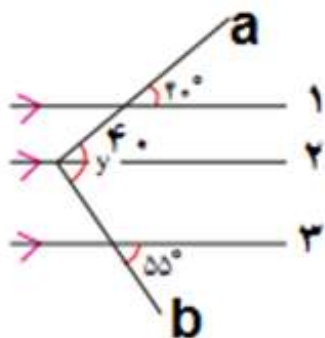
$$X = 180 - 60 = 120$$

قسمت د:



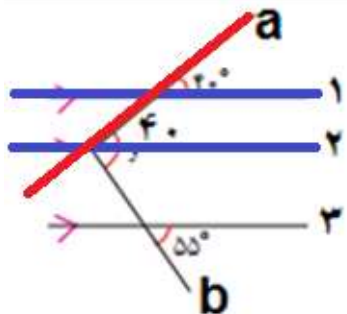


زاویه  $\gamma$  از دو قسمت تشکیل شده، ما دو قسمت رو جداگانه مناسبه می‌کنیم و با هم جمع می‌کنیم. ابتدا خطوط رو نامگذاری می‌کنیم که راحتتر بتونیم در موردشون صحبت کنیم:



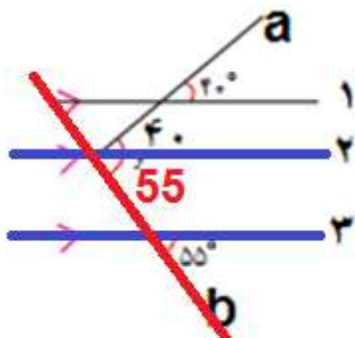
در شکل بالا فقط به خط ۱ و ۲ و  $a$  توجه کنید (به بقیه خطوط کاری نداشته باشید).

خط ۱ و ۲ با هم موازیند و خط  $a$  اونارو قطع کرده. پس قسمت بالای زاویه  $\gamma$  برابر  $40^\circ$  همیشه.

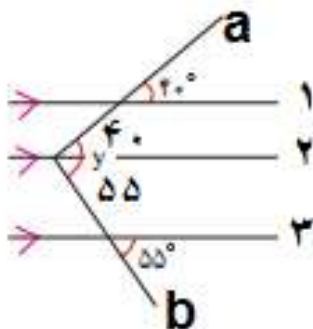


حالا به خط ۳ و ۲ و  $b$  توجه کنید (به بقیه خطوط کاری نداشته باشید).

خط ۳ و ۲ هم موازی هستن و خط  $b$  اومده اونارو قطع کرده. بنابراین قسمت پایینی زاویه  $\gamma$  برابر  $55^\circ$  درجه است.



پس در نهایت داریم:



بنابراین:

$$y = 40 + 55 = 95$$

ادامه تمرینها رو می تونید در "کانال خصوصی حل تمرین و نمونه سوال" ببینید 😊

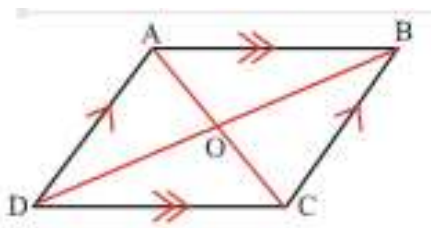
در صورت تمایل به عضویت، به ادمین کانال مراجعه کنید.

در ادامه ی درس به مبثت چهارضلعی ها می پردازیم:

## چهار ضلعی‌ها

همه ما از دوران ابتدایی یا شاید قبل از اون با چهارضلعی‌ها آشنا شدیم. این جلسه می‌فوییم یه کم بیشتر در موردشون یاد بگیریم:

### متوازی‌الاضلاع:



اول تعریفش می‌کنیم:

چهارضلعی‌ای که ضلع‌های روبروی آن دو به دو با هم موازیند.

حالا هر چی که در موردش می‌دونیم می‌نویسیم:

۱. ضلع‌های روبرو در متوازی‌الاضلاع با هم موازیند.

۲. ضلع‌های روبرو در متوازی‌الاضلاع با هم مساویند. یعنی:

$$AB = DC \quad , \quad AD = BC$$

۳. زاویه‌های روبرو در متوازی‌الاضلاع با هم برابرند، یعنی:

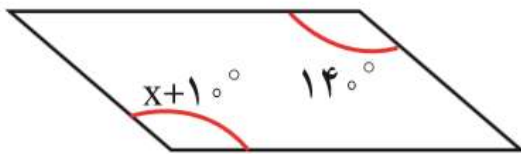
$$A = C \quad , \quad B = D$$

۴. در هر متوازی الاضلاع زاویه‌های مجاور مکمل هم‌گیرند. یعنی:

$$C + D = 180 \quad , \quad C + B = 180$$

$$A + B = 180 \quad , \quad A + D = 180$$

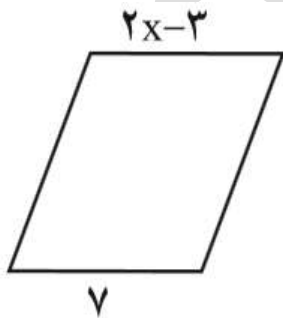
شکلهای زیر متوازی الاضلاع هستند، با تشکیل معادله مقدار  $X$  را به دست آورید:



دو تا زاویه روبروی هم هستند، بنابراین طبق خاصیت ۳، با هم برابرند:

$$X + 10 = 140$$

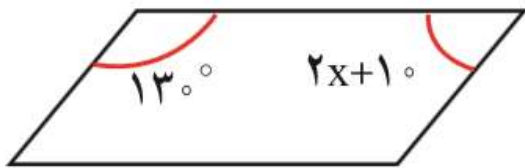
$$X = 140 - 10 = 130$$



دو تا ضلع داده شده روبروی هم هستند، بنابراین طبق خاصیت ۲ با هم برابرند:

$$2X - 3 = 7$$

$$2X = 10 \quad \rightarrow \quad X = \frac{10}{2} = 5$$



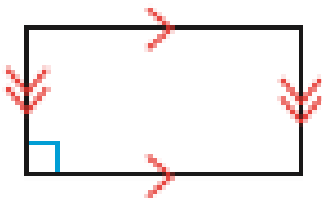
دو تا زاویه با هم مجاورن، پس طبق خاصیت ۴ با هم مکملن. بنابراین:

$$2X + 10 + 130 = 180$$

$$2X = 180 - 130 - 10$$

$$2X = 40 \quad \rightarrow \quad X = 20$$

حالا میفوییم یه متوازی الاضلاع بکشیم که یکی از زاویه‌هاش قائمه باشن، به نظرتون چه شکلی میشه؟



مستطیل شد... پس نتیجه ای که می‌تونیم بگیریم اینه که:

**مستطیل، متوازی‌الاضلاعی است که زاویه‌های آن قائمه هستند.**

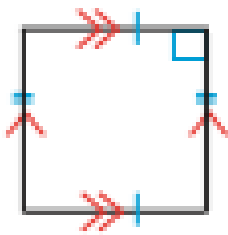
حالا بیاین یه متوازی الاضلاع بکشیم که اضلاعش برابرن:



چه شکلی شد؟ لوزی شد. پس نتیجه ای که می‌گیریم اینه:

**لوزی متوازی‌الاضلاع است که اضلاع آن برابرند.**

حالا یه متوازی‌الاضلاع بکشیم که هر دو تا حالت بالا رو داشته باشه، یعنی هم زاویه هاش قائمه باشه و هم اضلاعش برابر باشه:



چه شکلی شد؟ مربع. پس نتیجه زیر رو داریم:

**مربع، متوازی‌الاضلاع است که چهار ضلع مساوی و زاویه های قائمه دارد.**

یه نکته فیلی فیلی مهم رو توجه داشته باشید، همه ۴ فاصیتی که برای متوازی‌الاضلاع گفتیم، برای مستطیل، لوزی و مربع هم برقراره. کلا هر فاصیتی که برای متوازی‌الاضلاع بگیریم برای این سه تا شکل هم برقراره، چون اینها هم یه جور متوازی‌الاضلاع هستن.

ولی برعکسش لزوما درست نیست، یعنی ما آگه یه فاصییت برای مربع داشته باشیم، ممکنه متوازی الاضلاع اون خصوصیت رو داشته باشه، ممکنه نداشته باشه.

در اینجا برقی از فواص پنذ ضلعی ها رو میگیم:

### مستطیل:

۱. همه فواص متوازی الاضلاع رو داره.

۲. قطرهای مستطیل با هم برابرن

### لوزی:

۱. همه فواص متوازی الاضلاع رو داره.

۲. قطرهای لوزی بر هم عمودن

۳. قطرهای لوزی همدیگر رو نصف میکنن

۴. در لوزی هر قطر، نیمساز دو زاویه مقابل لوزی هست.

### مربع:

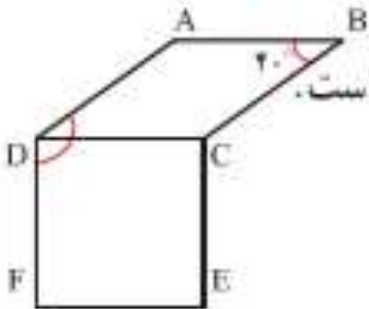
۱. مربع همه فواص متوازی الاضلاع، لوزی و مربع رو داره.

یعنی مربع هم یه نوع متوازی الاضلاع، هم یه نوع مستطیل و هم نوعی

لوزی

حل تمرین صفحه ۴۱

چهارضلعی‌ها



۱- چهارضلعی ABCD لوزی و چهارضلعی DCEF مربع است.

الف) چرا  $\overline{AD} = \overline{CE}$  ؟ ب) چرا  $AB \parallel EF$  ؟

ج) زاویه ADF چند درجه است؟

الف: چون ABCD لوزیه، پس اضلاعش با هم برابرند. بنابراین:

$$AD = DC$$

از طرفی چون DCEF مربعه، پس اضلاعش با هم برابرند. بنابراین:

$$DC = CE$$

از این دو تساوی نتیجه می‌گیریم:

$$AD = CE$$

ب:

چون ABCD لوزیه، پس اضلاع روبروش با هم موازیه. بنابراین:

$$AB \parallel DC$$

از طرفی چون DCEF مربعه، پس اضلاعش روبروش با هم موازیه. بنابراین:

$$DC \parallel EF$$

از این دو توازی نتیجه می‌گیریم:



$$AB \parallel EF$$

ج:

زاویه  $ADF$  از مجموع دو زاویه به وجود آمده، به زاویه از مربع و به زاویه از لوزی

$$ADF = CDF + ADC$$

میدونیم که همه زاویه های مربع  $90^\circ$  درجه هستن، پس  $CDF = 90$

از طرفی زاویه های روبرو در لوزی با هم برابرن، پس  $ADC = 40$

بنابراین:

$$ADF = 90 + 40 = 130$$

ادامه تمرینها رو می تونید در "کانال خصوصی حل تمرین و نمونه سوال" ببینید 😊

در صورت تمایل به عضویت، به ادمین کانال مراجعه کنید.

آموزش گام به گام ریاضی چهارم تا دهم در سایت:

[www.riazibaham.ir](http://www.riazibaham.ir)

و کانال های [@RiaziBaHam](https://www.instagram.com/RiaziBaHam) و [@RiaziBaHam8](https://www.instagram.com/RiaziBaHam8)

برای دریافت جزوات سایر پایه ها، تمرینهای حل شده و نمونه سوالات

امتمانی حل شده، به "ریاضی با هم" پیوندید.